

DS de mathématiques n°3

Fonctions, applications

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.

La clarté de la copie pourra faire varier la note de ± 1 point.

Exercice 1 : Résolutions d'(in)équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1) $\sqrt{x-1} = 3-x$

2) $|1-x| + |x| = 1$

3) $\frac{3x-2}{5-3x} \geq 1$

Exercice-Problème 2 : Une identité trigonométrique

On pose $f : x \mapsto \arccos(\operatorname{th} x) + \arctan(\operatorname{sh} x)$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Justifier que f est dérivable et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

3) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{5}{13}$$

4) En déduire la valeur de :

$$\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

Exercice-Problème 3 : des fonctions pas si égales ?

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{x-1}) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)$$

1) Déterminer les domaines de définition de f et de g .

2) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ que l'on précisera tel que g est dérivable sur $]1, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$.

3) Soit $x > 1$. Calculer $f'(x)$. Si $x \neq \alpha$, calculer aussi $g'(x)$. Que peut-on en déduire ?

4) Dresser les tableaux de variations de f et de g (avec leurs limites).

5) Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers α^+ et quand x tend vers α^- .

6) Tracer, sur le même graphe, les courbes de f et de g .

Exercice-Problème 4 : L'équation $m^n = n^m$

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les couples **d'entiers naturels** (m, n) vérifiant $m^n = n^m$ et $0 < m < n$. Pour résoudre ce problème, on va dans un premier temps s'intéresser à un problème plus difficile, celui de trouver les couples de **réels** (x, y) qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ et tels que $0 < x < y$.

On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

- 1) Étudier f : domaine de définition, de dérivabilité, calcul de la dérivée, limites aux bornes du domaine de définition, tableau de variations.
- 2) Montrer que f réalise une bijection de $]0, e]$ sur un ensemble J qu'on déterminera, et montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur un ensemble J' qu'on déterminera.
- 3) On considère un couple quelconque (x, y) qui est solution de $x^y = y^x$ (avec $0 < x < y$).
 - a) Montrer que $f(x) = f(y)$.
 - b) En déduire que $y \in]e, +\infty[$. On pourra raisonner par l'absurde.
 - c) En déduire que $x \in]1, e[$. On pourra là encore raisonner par l'absurde.

On met à présent de côté le problème « $x^y = y^x$ » : celui-ci n'a pas été complètement résolu, mais ce qu'on sait va nous suffire à traiter le problème « $m^n = n^m$ » (avec $0 < m < n$).

- 4) Donner une solution évidente.
- 5) En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer *soigneusement* les couples d'entiers naturels (m, n) vérifiant $m^n = n^m$ et $0 < m < n$.

Exercice-Problème 5 : Découverte du log complexe

Pour tout complexe z non nul, on note $\arg(z)$ l'unique argument de z qui est dans $[0, 2\pi[$. On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \ln|z| + i \arg(z) \end{cases}$$

- 1) Calculer $f(r)$ pour $r > 0$, $f(e^{2i\pi/8})$, $f(e^{i3\pi})$ et $f(1-i)$.
- 2) Peut-on affirmer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $e^{f(z)} = z$? et $f(e^z) = z$? Justifier.
- 3) L'application f est-elle injective ?
- 4) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 6 : Un exercice tombé à l'oral de l'X

On se donne 13 réels distincts, que l'on ordonne par ordre (strictement) croissant :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{13}$$

L'objectif est de montrer que parmi ces 13 réels, on peut toujours en trouver deux, appelons-les u et v , tels que $0 < \frac{u-v}{1+uv} < 2 - \sqrt{3}$.

Calculer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et en déduire le résultat voulu. On pourra poser, pour tout $i \in \llbracket 1, 13 \rrbracket$, $a_i = \arctan x_i$.